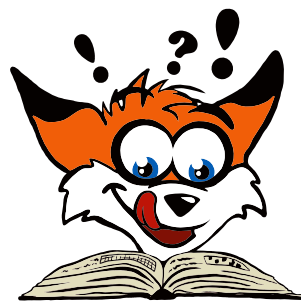


# Wahrscheinlichkeitsrechnung

Andreas Schneider

Version 1.0



Mathe**b**ibel

# Inhaltsverzeichnis

<b>Wahrscheinlichkeitsrechnung</b>	<b>4</b>
Zufallsexperiment	6
Ergebnis & Ergebnisraum	9
Ereignis & Ereignisraum	14
Ereignis & Ereignisraum	19
Elementarereignis	21
Zusammengesetztes Ereignis	23
Sicheres Ereignis	24
Ereignisalgebra	26
Vierfeldertafel	35
Absolute Häufigkeit	41
Relative Häufigkeit	43
Mehrstufige Zufallsexperimente	47
Baumdiagramm	48
Pfadregeln	53
Kombinatorik	58
Allgemeines Zählprinzip	67
Permutation ohne Wiederholung	69
Permutation mit Wiederholung	72
Variation ohne Wiederholung	75
Variation mit Wiederholung	78
Kombination ohne Wiederholung	80
Kombination mit Wiederholung	83
Laplace-Experiment	86
Stochastische Unabhängigkeit	90
Bedingte Wahrscheinlichkeit	99
Multiplikationssatz	110

---

Satz der totalen Wahrscheinlichkeit . . . . .	117
Satz von Bayes . . . . .	122
Zufallsvariable . . . . .	127
Diskrete Zufallsvariable . . . . .	132
Stetige Zufallsvariable . . . . .	137
Wahrscheinlichkeitsverteilung . . . . .	141
Wahrscheinlichkeitsfunktion . . . . .	145
Dichtefunktion . . . . .	153
Verteilungsfunktion . . . . .	160
Erwartungswert . . . . .	179
Varianz . . . . .	185
Standardabweichung . . . . .	195
Diskrete Verteilung . . . . .	201
Stetige Verteilung . . . . .	204

# Wahrscheinlichkeitsrechnung

<u>Zufallsexperiment</u>	Was sind Zufallsexperimente?
<u>Ergebnis &amp; Ergebnisraum</u>	Was ist das Ergebnis $\omega$ bzw. der Ergebnisraum $\Omega$ ?
<u>Ereignis &amp; Ereignisraum</u>	Was ist das Ereignis $E$ bzw. der Ereignisraum $\mathcal{P}(\Omega)$ ?
> <u>Unmögliches Ereignis</u>	Was ist das unmögliche Ereignis?
> <u>Elementarereignis</u>	Was ist ein Elementarereignis?
> <u>Zusammengesetztes Ereignis</u>	Was ist ein zusammengesetztes Ereignis?
>> <u>Sicheres Ereignis</u>	Was ist das sichere Ereignis?
<u>Ereignisalgebra</u>	Wie rechnet man mit Ereignissen?
<u>Vierfeldertafel</u>	Wie kann man die Verknüpfungen zweier Ereignisse visualisieren?
<u>Absolute Häufigkeit</u>	Was versteht man unter der absoluten Häufigkeit?
<u>Relative Häufigkeit</u>	Was versteht man unter der relativen Häufigkeit?
<u>Mehrstufige Zufallsexperimente</u>	Was sind mehrstufige Zufallsexperimente?
> <u>Baumdiagramm</u>	Wie visualisiert man mehrstufige Zufallsexperimente?
> <u>Pfadregeln</u>	Wie berechnet man Wahrscheinlichkeiten in mehrstufigen Zufallsexperimenten?
<u>Kombinatorik</u>	Was ist Kombinatorik?
> <u>Allgemeines Zählprinzip</u>	Was besagt das allgemeine Zählprinzip?
> <u>Permutation ohne Wiederholung</u>	Was versteht man unter einer Permutation ohne Wiederholung?
> <u>Permutation mit Wiederholung</u>	Was versteht man unter einer Permutation mit Wiederholung?

> <u>Variation ohne Wiederholung</u>	Was versteht man unter einer Variation ohne Wiederholung?
> <u>Variation mit Wiederholung</u>	Was versteht man unter einer Variation mit Wiederholung?
> <u>Kombination ohne Wiederholung</u>	Was versteht man unter einer Kombination ohne Wiederholung?
> <u>Kombination mit Wiederholung</u>	Was versteht man unter einer Kombination mit Wiederholung?
<u>Laplace-Experiment</u>	Was ist ein Laplace-Experiment?
<u>Stochastische Unabhängigkeit</u>	Wann sind zwei Ereignisse unabhängig?
<u>Bedingte Wahrscheinlichkeit</u>	Wann beeinflussen sich zwei Ereignisse?
> <u>Multiplikationssatz</u>	Was besagt der Multiplikationssatz?
> <u>Satz der totalen Wahrscheinlichkeit</u>	Was besagt der Satz der totalen Wahrscheinlichkeit?
> <u>Satz von Bayes</u>	Was besagt der Satz von Bayes?
<u>Zufallsvariable</u>	Was ist eine Zufallsvariable?
> <u>Diskrete Zufallsvariable</u>	Was ist eine diskrete Zufallsvariable?
> <u>Stetige Zufallsvariable</u>	Was ist eine stetige Zufallsvariable?
<u>Wahrscheinlichkeitsverteilung</u>	Was ist eine Wahrscheinlichkeitsverteilung?
> <u>Wahrscheinlichkeitsfunktion</u>	Was ist eine Wahrscheinlichkeitsfunktion?
> <u>Dichtefunktion</u>	Was ist eine Dichtefunktion?
> <u>Verteilungsfunktion</u>	Was ist eine Verteilungsfunktion?
<u>Erwartungswert</u>	Wie berechnet man den Erwartungswert?
<u>Varianz</u>	Wie berechnet man die Varianz?
<u>Standardabweichung</u>	Wie berechnet man die Standardabweichung?
<u>Diskrete Verteilung</u>	Was ist eine diskrete Verteilung?
<u>Stetige Verteilung</u>	Was ist eine stetige Verteilung?

# Zufallsexperiment

In diesem Kapitel schauen wir an, was ein Zufallsexperiment ist.

Im Chemie- und Physikunterricht werden regelmäßig Versuche durchgeführt. Einer dieser Versuche könnte das Messen der Siedetemperatur von Wasser sein. Egal, wie oft wir den Versuch durchführen, wir erhalten stets dasselbe Ergebnis: Wasser verdampft bei 100°C.

In der Wahrscheinlichkeitsrechnung beschäftigen wir mit Versuchen, deren Ergebnisse sich nicht vorhersagen lassen, d. h. vom Zufall abhängig sind. Zu dieser Art von Versuchen zählt das Werfen einer Münze. Bekanntlich können wir nicht vorhersagen, ob „Kopf“ oder „Zahl“ oben liegt.

Ein **Zufallsexperiment** ist ein Versuch mit zufälligem Ausgang.

## *Beispiele für Zufallsexperimente*

- Werfen einer Münze
- Werfen eines Würfels
- Ziehen einer Kugel aus einer Urne
- Ziehen einer Karte aus einem Kartenspiel
- Drehen eines Glücksrads
- Roulette
- Lotto
- Auswahl einer Zahl zwischen 1 und 10 durch einen Zufallsgenerator
- Befragung einer unbekanntenen Person nach der Partei, die diese bei der letzten Wahl gewählt hat
- Messung einer physikalischen Größe mit einer bestimmten Messmethode (wegen der unvermeidlichen, zufälligen Messabweichungen)

# Eigenschaften eines Zufallsexperiments

Ein Versuch heißt **Zufallsexperiment**, falls

- (a) er unter gleichen Bedingungen beliebig oft wiederholbar ist,
- (b) alle möglichen Ergebnisse vor Durchführung bekannt sind und
- (c) sein Ergebnis sich nicht mit Sicherheit vorhersagen lässt.

## *Beispiel*

Das Werfen einer Münze ist ein Zufallsexperiment, denn

- (a) es lässt sich unter gleichen Bedingungen beliebig oft wiederholen,
- (b) alle möglichen Ergebnisse („Kopf“ und „Zahl“) sind vor Durchführung bekannt und
- (c) sein Ergebnis („Kopf“ oder „Zahl“) lässt sich nicht mit Sicherheit vorhersagen.

## *Gegenbeispiel*

Das Messen der Siedetemperatur von Wasser ist kein Zufallsexperiment, denn

- (a) es lässt sich zwar unter gleichen Bedingungen beliebig oft wiederholen und
- (b) alle möglichen Ergebnisse (100°C) sind vor Durchführung bekannt, aber
- (c) sein Ergebnis (100°C) lässt sich mit Sicherheit vorhersagen.

# Einstufige Zufallsexperimente

Ein Zufallsexperiment, das nur einmal durchgeführt wird, heißt **einstufig**.

## *Beispiele für einstufige Zufallsexperimente*

- einmaliges Werfen einer Münze oder eines Würfels
- einmaliges Ziehen einer Karte aus einem gemischten Stapel

# Mehrstufige Zufallsexperimente

Ein Zufallsexperiment, das aus mehreren Schritten besteht, die für sich selbst auch Zufallsexperimente sind, heißt **mehrstufig**.

## Beispiele für mehrstufige Zufallsexperimente

- zweimaliges Werfen einer Münze oder eines Würfels
- fünfmaliges Ziehen einer Karte aus einem gemischten Stapel

# Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung

Die Wahrscheinlichkeitsrechnung baut auf folgenden Grundbegriffen auf:

	Bezeichnung	Beispiel
<u>Zufallsexperiment</u>		Werfen eines Würfels
<u>Ergebnis</u>	$\omega$ („Klein-Omega“)	Augenzahl 4 $\Rightarrow \omega = 4$
<u>Ergebnisraum</u>	$\Omega$ („Groß-Omega“)	$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
<u>Ereignis</u>	ein lat. Großbuchstabe (z. B. $A, B, C \dots$ )	$E$ : „Augenzahl kleiner 4“ $\Rightarrow E = \{1, 2, 3\}$
<u>Ereignisraum</u>	$\mathcal{P}(\Omega)$	$\mathcal{P}(\Omega) = \{\{\}, \{1\}, \dots, \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\}$

PS: Wir empfehlen euch, die Mengenlehre noch einmal zu wiederholen!