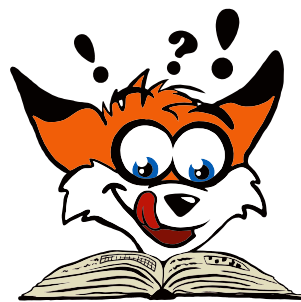


Analytische Geometrie

Andreas Schneider

Version 1.0



Mathebibel

Inhaltsverzeichnis

Analytische Geometrie	4
Parameterform	7
Koordinatenform	10
Normalenform	13
Hessesche Normalform	15
Parameterform in Normalenform	19
Normalenform in Koordinatenform	24
Parameterform in Koordinatenform	27
Koordinatenform in Parameterform	31
Normalenform in Parameterform	38
Koordinatenform in Normalenform	42
Geraden	49
Geradengleichung	50
Parameterform	55
Zwei-Punkte-Form	59
Punkt auf Gerade?	63
Spurpunkte	65
Lagebeziehungen von Geraden	68
Identische Geraden	74
Echt parallele Geraden	77
Windschiefe Geraden	80
Sich schneidende Geraden	85
Schnittpunkt zweier Geraden	88
Schnittwinkel zweier Geraden	92
Abstandsberechnung	97
Abstand Punkt-Punkt	98
Abstand Punkt-Geraden	100

Abstand Gerade-Geraden	104
Abstand paralleler Geraden	106
Abstand windschiefer Geraden	110
Abstand Punkt-Ebene	113

Analytische Geometrie

Arten von Geraden- und Ebenengleichungen

<u>Parameterform</u>	Was versteht man unter der Parameterform?
<u>Koordinatenform</u>	Was versteht man unter der Koordinatenform?
<u>Normalenform</u>	Was versteht man unter der Normalenform?
<u>Hessesche Normalform</u>	Was versteht man unter der Hesseschen Normalform?

Gleichungen umformen

<u>Parameterform in Normalenform</u>	Wie wandelt man die Parameterform in die Normalenform um?
<u>Normalenform in Koordinatenform</u>	Wie wandelt man die Normalenform in die Koordinatenform um?
<u>Parameterform in Koordinatenform</u>	Wie wandelt man die Parameterform in die Koordinatenform um?
<u>Koordinatenform in Parameterform</u>	Wie wandelt man die Koordinatenform in die Parameterform um?
<u>Normalenform in Parameterform</u>	Wie wandelt man die Normalenform in die Parameterform um?
<u>Koordinatenform in Normalenform</u>	Wie wandelt man die Koordinatenform in die Normalenform um?

Geraden

<u>Geradengleichung</u>	Welche Arten von Geradengleichungen gibt es?
-------------------------	--

<u>Geradengleichung - Parameterform</u>	Wie stellt man die Geradengleichung in Parameterform auf, wenn ein Punkt und ein Richtungsvektor gegeben ist?
<u>Zwei Punkte Form</u>	Wie stellt man die Geradengleichung in Parameterform auf, wenn zwei Punkte gegeben sind?
<u>Punkt auf Gerade?</u>	Wie findet man rechnerisch heraus, ob ein Punkt auf einer Geraden liegt?
<u>Spurpunkte</u>	Wie berechnet man den Schnittpunkt einer Geraden mit einer Koordinatenachse?
<u>Lagebeziehungen von Geraden</u>	Erfahren alles über die Lagebeziehungen von Geraden im dreidimensionalen Raum!
<u>Identische Geraden</u>	Welche Bedingungen müssen erfüllt sein, damit zwei Geraden identisch sind?
<u>Echt parallele Geraden</u>	Welche Bedingungen müssen erfüllt sein, damit zwei Geraden echt parallel sind?
<u>Windschiefe Geraden</u>	Welche Bedingungen müssen erfüllt sein, damit zwei Geraden windschief sind?
<u>Sich schneidende Geraden</u>	Welche Bedingungen müssen erfüllt sein, damit zwei Geraden sich schneiden?
<u>Schnittpunkt zweier Geraden</u>	Wann schneiden sich zwei Geraden und wie berechnet man den Schnittpunkt?
<u>Schnittwinkel zweier Geraden</u>	Wie berechnet man den Schnittwinkel zwischen zwei Geraden?

Abstandsberechnungen

<u>Abstand Punkt-Punkt</u>	Wie berechnet man den Abstand zwischen zwei Punkten?
<u>Abstand Punkt-Gerade</u>	Wie berechnet man den Abstand zwischen einem Punkt und einer Geraden?
<u>Abstand Gerade-Gerade</u>	Wie berechnet man den Abstand zwischen zwei Geraden?
<u>Abstand paralleler Geraden</u>	Wie berechnet man den Abstand zweier paralleler Geraden?

Abstand windschiefer
Geraden

Wie berechnet man den Abstand zweier windschiefer Geraden?

Abstand Punkt-Ebene

Wie berechnet man den Abstand zwischen einem Punkt und einer Ebene?

Parameterform

In diesem Kapitel besprechen wir die Parameterform.

Die Parameterform ist eine spezielle Form einer Geradengleichung oder Ebenengleichung.

Parameterform einer Geraden

$$g: \vec{x} = \vec{a} + \lambda \cdot \vec{u}$$

Bedeutung

- \vec{a} : Aufpunkt (oder Stützvektor)
- λ : Parameter ("Lambda")
- \vec{u} : Richtungsvektor

Beispiel

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Punkt auf einer Geraden

Jeder Punkt einer Geraden wird in Abhängigkeit des Parameters λ beschrieben.

Wenn also die Gerade

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}$$

gegeben ist und man drei verschiedene Punkte auf dieser Geraden sucht, setzt man einfach irgendwelche Werte für λ ein.

$$\lambda = 0$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Bei $\lambda = 0$ handelt es sich um einen Spezialfall, denn der Aufpunkt liegt immer auf der Geraden!

$$\lambda = 1$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\lambda = 2$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 15 \\ 11 \end{pmatrix}$$

Aufgabentypen

Geradengleichung in Parameterform aufstellen

- mit Hilfe eines Punktes und eines Richtungsvektors
 - mit Hilfe zweier Punkte
-

Prüfen, ob ein Punkt auf einer Geraden liegt

Schnittpunkte einer Geraden mit den Koordinatenachsen

Lagebeziehungen von Geraden

- Identische Geraden
 - Parallele Geraden
 - Windschiefe Geraden
 - Sich schneidende Geraden
 - > Schnittpunkt zweier Geraden
 - > Schnittwinkel zweier Geraden
-

Parameterform einer Ebene

$$E: \vec{x} = \vec{a} + \lambda \cdot \vec{u} + \mu \cdot \vec{v}$$

Bedeutung

- \vec{a} : Aufpunkt (oder Stützvektor)
- λ : Parameter ("Lambda")
- \vec{u} : Richtungsvektor
- μ : Parameter ("My")
- \vec{v} : Richtungsvektor

Beispiel

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Punkt auf einer Ebene

Jeder Punkt einer Ebene wird in Abhängigkeit der Parameter λ und μ beschrieben.
(vgl. Abschnitt "Punkt auf einer Geraden")

Parameterform umwandeln

Parameterform gegeben

Parameterform in Koordinatenform

Parameterform in Normalenform

Parameterform nicht gegeben

Koordinatenform in Parameterform

Normalenform in Parameterform

Je nach Aufgabenstellung kann es notwendig sein, die Parameterform umzuwandeln.