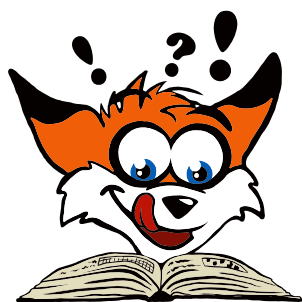


Grenzwert

Andreas Schneider

Version 1.0



Mathe**b**ibel

Inhaltsverzeichnis

Grenzwert	3
Rechenregeln für Grenzwerte	16
Grenzwert einer Potenzfunktion	20
Grenzwert einer Exponentialfunktion	23
Grenzwert einer gebrochenrationalen Funktion	25
Regel von l'Hospital	34
Stetigkeit von Funktionen	37

Grenzwert

In diesem Kapitel besprechen wir, was man unter dem Begriff „Grenzwert“ versteht.

Im Rahmen einer Kurvendiskussion möchte man möglichst viele Informationen über eine Funktion und deren Graphen erhalten. Eine dieser Informationen liefert der Grenzwert:

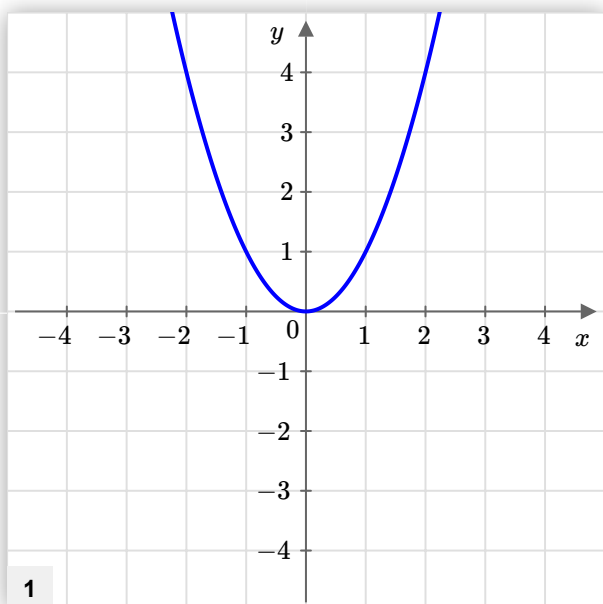
Wie verhalten sich die y -Werte,
wenn die x -Werte in eine bestimmte Richtung gehen?

Dabei lassen sich folgende Fälle unterscheiden:

1. Die x -Werte gehen gegen unendlich
2. Die x -Werte gehen gegen eine endliche Stelle x_0

1. Grenzwert im Unendlichen

Um dieses Thema zu veranschaulichen, betrachten wir den Graph einer Normalparabel.



Im Koordinatensystem ist der Graph der Funktion $f(x) = x^2$ eingezeichnet.

So schön die obige Abbildung auch sein mag, es zeigt sich folgendes Problem: Wir können immer nur einen bestimmten Ausschnitt der Funktion darstellen, also nie die ganze Funktion, unabhängig davon, wie groß wir das Koordinatensystem zeichnen. Es bleibt letztlich die Frage: Wie sieht der Graph der Funktion außerhalb des Koordinatensystems aus? Was passiert also, wenn wir unendlich große oder unendlich kleine Werte für x in die Funktion einsetzen? Eine Antwort auf diese Fragen liefert uns der Grenzwert.

$$x \rightarrow +\infty$$

Wie verhalten sich die y -Werte,
wenn die x -Werte immer größer werden?

Die obige Frage lässt sich mathematisch ganz einfach formulieren:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2$$

[sprich: *Limes von x^2 für x gegen $+\infty$ (plus unendlich)]*

Dabei bedeutet "Limes" nichts anderes als Grenzwert.

Um zu untersuchen, wie sich die y -Werte verhalten, wenn die **x -Werte immer größer** werden, stellen wir folgende Wertetabelle auf

x	1	10	100	1.000	10.000	...
$f(x)$	1	100	10.000	1.000.000	100.000.000	...

Wenn wir für x den Wert 10 einsetzen, erhalten wir einen Funktionswert von 100. Setzt man 10.000 ein, erhält man einen Funktionswert von 100.000.000. Wir können uns vorstellen, was passiert, wenn wir noch größere Werte einsetzen: Die Funktionswerte werden unendlich groß.

Mathematisch formuliert bedeutet das:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$$

Der Limes von x^2 für x gegen $+\infty$ ist $+\infty$.

Damit haben wir unseren ersten Grenzwert berechnet! War doch gar nicht so schwer oder?