Gebrochenrationale Funktionen

Andreas Schneider

Version 1.0

Mathebibel

Inhaltsverzeichnis

Gebrochenrationale Funktionen

In diesem Kapitel besprechen wir die gebrochenrationalen Funktionen.

Eine **gebrochenrationale Funktion** ist eine Funktion, bei der sich sowohl im Zähler als auch im Nenner eine ganzrationale Funktion befindet:

$$f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0}$$

Zu den ganzrationalen Funktionen zählen u.a. lineare Funktionen und quadratische Funktionen.

Beispiele für gebrochenrationale Funktionen

$$f(x) = \frac{x^4}{x-1}$$

$$f(x) = \frac{x+4}{x^3+x}$$

$$f(x) = \frac{x^2-5x+3}{x^2+3x-6}$$

Besonderheiten von gebrochenrationalen Funktionen

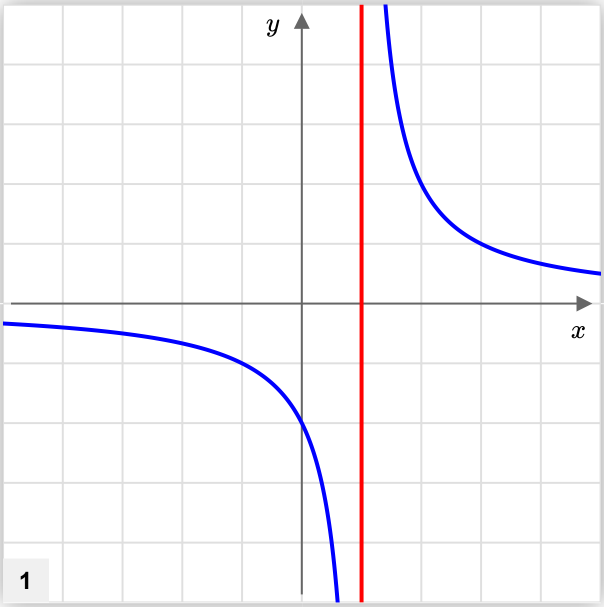
1. Dort, wo der Nenner Null wird, ist die Funktion nicht definiert (> Definitionslücke).

2. An Stellen, wo die Funktion nicht definiert ist, kann
   a) der Graph eine hebbare Definitionslücke haben.
   b) der Graph sich immer mehr einer Geraden parallel zur y-Achse annähern.

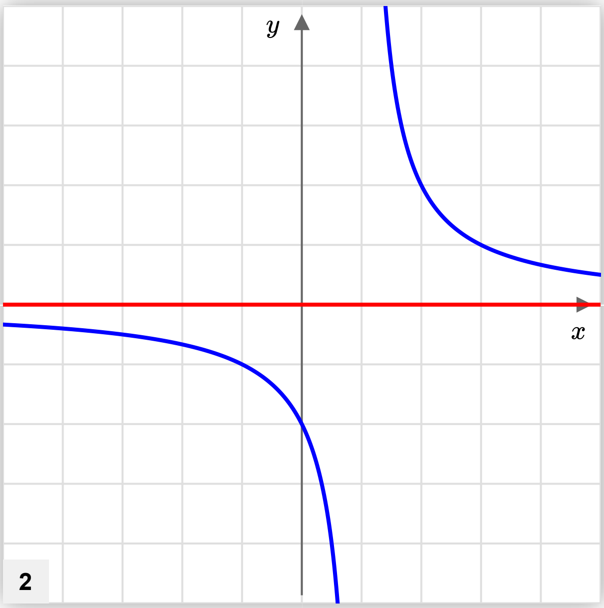
Diese Gerade nennt man senkrechte Asymptote.
Die Definitionslücke heißt Polstelle (oder Unendlichkeitsstelle).

3. Der Graph kann sich für $x \to \infty$ immer mehr einer Geraden annähern, die parallel zur x-Achse oder schief zu dieser verläuft.
Die entsprechenden Geraden heißen waagrechte Asymptote bzw. schiefe Asymptote.

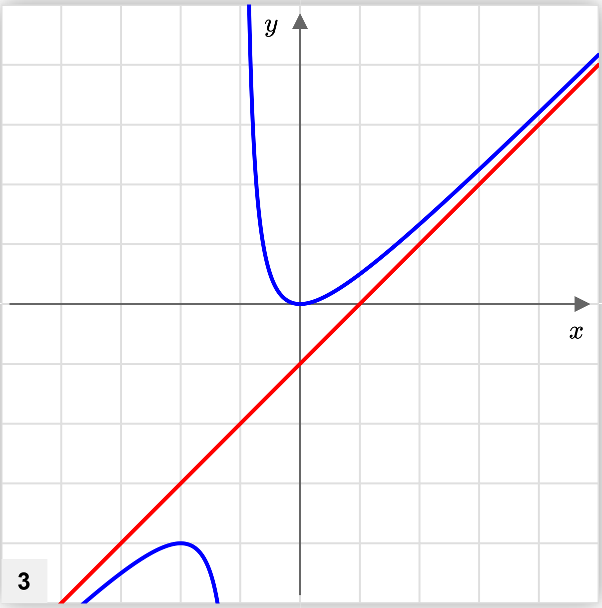
Wie sehen Asymptoten aus?



a) Senkrechte Asymptote



b) Waagrechte Asymptote



c) Schiefe Asymptote

Zählergrad / Nennergrad bestimmen

Im Zusammenhang mit gebrochenrationalen Funktionen wird oft nach dem Zählergrad bzw. dem Nennergrad gefragt. Aus diesem Grund wollen wir diese Begriffe kurz definieren und anhand von Beispielen verdeutlichen.

Unter dem **Zählergrad** einer Funktion versteht man die höchste Potenz, die im Zähler vorkommt.

Beispiel

Der Zählergrad der Funktion

$$f(x) = \frac{x^{\boxed{3}} + 4x^2 - 7}{x + 3}$$

ist **3**, da x^3 die höchste Potenz im Zähler ist.

Unter dem **Nennergrad** einer Funktion versteht man die höchste Potenz, die im Nenner vorkommt.