Lineare Gleichungssysteme

Andreas Schneider

Version 1.0

Mathebibel

Inhaltsverzeichnis

Lineare Gleichungssysteme

In diesem Kapitel beschäftigen wir uns mit linearen Gleichungssystemen. Zunächst klären wir, worum es sich dabei handelt und welche Schreibweisen es gibt.

Wiederholung: Lineare Gleichungen

Weißt du noch was eine lineare Gleichung ist? Dabei handelt es sich um eine Gleichung ersten Grades, d.h. die Variable x kommt in keiner höheren als der ersten Potenz vor.

Allgemeine Form: $ax + b = 0$

Beispiel: $3x - 4 = 0$

Von einer linearen Gleichung zum Gleichungssystem

Als lineares Gleichungssystem bezeichnet man ein System linearer Gleichungen, die mehrere Unbekannte ("Variablen") enthalten.

Schauen wir uns dazu ein kleines Beispiel an

$$
\begin{aligned}
3x_1 + 4x_2 &= -1 \\
2x_1 - 5x_2 &= 3
\end{aligned}
$$

Der Unterschied zwischen einer linearen Gleichung und einem linearen Gleichungssystem ist das Vorhandensein

- mehrerer Gleichungen
- mehrerer Unbekannten

Im Zusammenhang mit linearen Gleichungssystemen verwendet auch oft die Abkürzung "LGS".

Schreibweisen

Allgemeine Form

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

Beispiel

$$\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 &= 1 \\ -2x_1 + 5x_2 - 6x_3 &= 0 \\ 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 &= 3 \end{aligned}$$

Matrizendarstellung

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & -6 \\ 4 & 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Kurz: $Ax = b$

Bedeutung:
A: Koeffizientenmatrix
x: Lösungsvektor
b: rechte Seite

Erweiterte Matrix $(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b})$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 3 & -2 & 2 & 1 \\ -2 & 5 & -6 & 0 \\ 4 & 3 & -2 & 3 \end{array}\right)$$

Dabei bringt die erweiterte Matrix $(A|b)$ den geringsten Schreibaufwand mit sich.