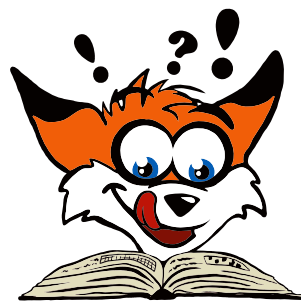


# Lineare Gleichungssysteme

Andreas Schneider

Version 1.0



**Mathe**bibel

# Inhaltsverzeichnis

|   |          |
|---|----------|
| <b>Lineare Gleichungssysteme</b> . . . . .      | <b>3</b> |
| Koeffizientenmatrix . . . . .                   | 7        |
| Erweiterte Koeffizientenmatrix . . . . .        | 9        |
| Lineare Gleichungssysteme lösen . . . . .       | 12       |
| Gleichsetzungsverfahren . . . . .               | 17       |
| Einsetzungsverfahren . . . . .                  | 24       |
| Additionsverfahren . . . . .                    | 30       |
| Gauß-Algorithmus . . . . .                      | 37       |
| Gauß-Jordan-Algorithmus . . . . .               | 45       |
| Cramersche Regel . . . . .                      | 52       |
| Lösbarkeit linearer Gleichungssysteme . . . . . | 55       |

# Lineare Gleichungssysteme

In diesem Kapitel beschäftigen wir uns mit linearen Gleichungssystemen. Zunächst klären wir, worum es sich dabei handelt und welche Schreibweisen es gibt.

## Wiederholung: Lineare Gleichungen

Weißt du noch was eine lineare Gleichung ist? Dabei handelt es sich um eine Gleichung ersten Grades, d.h. die Variable  $x$  kommt in keiner höheren als der ersten Potenz vor.

Allgemeine Form:  $ax + b = 0$

Beispiel:  $3x - 4 = 0$

## Von einer linearen Gleichung zum Gleichungssystem

Als lineares Gleichungssystem bezeichnet man ein System linearer Gleichungen, die mehrere Unbekannte ("Variablen") enthalten.

Schauen wir uns dazu ein kleines Beispiel an

$$\begin{aligned} 3x_1 + 4x_2 &= -1 \\ 2x_1 - 5x_2 &= 3 \end{aligned}$$

Der Unterschied zwischen einer linearen Gleichung und einem linearen Gleichungssystem ist das Vorhandensein

- mehrerer Gleichungen
- mehrerer Unbekannten

Im Zusammenhang mit linearen Gleichungssystemen verwendet auch oft die Abkürzung "LGS".

# Schreibweisen

## Allgemeine Form

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

## Beispiel

$$\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 &= 1 \\ -2x_1 + 5x_2 - 6x_3 &= 0 \\ 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 &= 3 \end{aligned}$$

## Matrizendarstellung

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & -6 \\ 4 & 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Kurz:  $Ax = b$

Bedeutung:

$A$ : Koeffizientenmatrix

$x$ : Lösungsvektor

$b$ : rechte Seite

## Erweiterte Matrix ( $A|b$ )

$$\left( \begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array} \right) \quad \left( \begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 2 & 1 \\ -2 & 5 & -6 & 0 \\ 4 & 3 & -2 & 3 \end{array} \right)$$

Dabei bringt die erweiterte Matrix ( $A|b$ ) den geringsten Schreibaufwand mit sich.