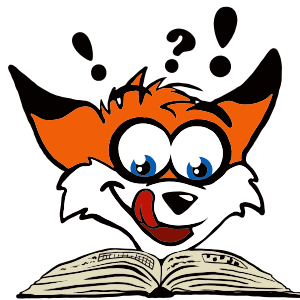


Gleichungen

Andreas Schneider

Version 1.0



Mathebibel

Inhaltsverzeichnis

Gleichungen	3
Äquivalenzumformungen	8
Satz vom Nullprodukt	11
Lineare Gleichungen	15
Lineare Gleichungen lösen	17
Quadratische Gleichungen	21
Quadratische Gleichungen lösen	23
Diskriminante	29
Mitternachtsformel	32
pq-Formel	37
Satz von Vieta	42
Biquadratische Gleichungen	47
Kubische Gleichungen	52
Kubische Gleichungen lösen	55
Polynomdivision	59
Horner-Schema	63
Bruchgleichungen	66
Bruchgleichungen lösen	69
Betragsgleichungen	76
Potenzgleichungen	86
Wurzelgleichungen	92
Betragsgleichungen	100
Exponentialgleichungen	110
Logarithmusgleichungen	117

Gleichungen

In diesem Kapitel schauen wir uns an, was Gleichungen sind.

Eine **Gleichung** ist eine Aussage über die Gleichheit zweier Terme, die mit Hilfe des Gleichheitszeichens ("=") symbolisiert wird.

Beispiel einer Gleichung

$$T_1 = T_2$$

Dabei sind T_1 und T_2 beliebige Terme.

- den Term T_1 nennt man auch die **linke Seite** der Gleichung
- den Term T_2 nennt man auch die **rechte Seite** der Gleichung

Gleichungen sind entweder **wahr** (z.B. $5 = 5$) oder **falsch** (z.B. $5 = 6$).

An Stelle von **wahr** sagt man auch **erfüllt**.

Wie kann man sich eine Gleichung bildlich vorstellen?

Eine Gleichung ist eine Waage.

Wenn die Gleichung **wahr** ist, befindet sich die Waage im **Gleichgewicht**.

$5 = 5$ bedeutet, dass sich in beiden Waagschalen 5 Kilo befinden.

Wenn die Gleichung **falsch** ist, befindet sich die Waage im **Ungleichgewicht**.

$5 = 6$ bedeutet, dass in der rechten Waagschale ein Kilo mehr ist als in der linken Waagschale.

Gleichungen mit Variablen

Die Betrachtung von Gleichungen, in denen nur Zahlen vorkommen, wird schnell langweilig:

$$1 = 1$$

$$5 = 5$$

$$-2 = -2$$

...

Interessant wird es erst, wenn wir eine Variable einführen:

$$5 + x = 10$$

In der obigen Gleichung ist der Kleinbuchstabe x die Variable. Manchmal spricht man auch von einer "Unbekannten". Eine Variable ist nichts anderes als ein Platzhalter für eine Zahl.

Wir könnten zum Beispiel für x die Zahlen 1 und 5 einsetzen.

- $x = 1$:

$$5 + 1 = 10 \quad \rightarrow \quad 6 = 10$$

Setzen wir für x den Wert 1 ein, trifft die Gleichung eine **falsche Aussage**.

- $x = 5$:

$$5 + 5 = 10 \quad \rightarrow \quad 10 = 10$$

Setzen wir für x den Wert 5 ein, trifft die Gleichung eine **wahre Aussage**.

Bei **Gleichungen mit Variablen** hängt es von dem konkret eingesetzten Wert ab, ob die Gleichung wahr oder falsch ist.

In den meisten Aufgaben wirst du auf die Variable x stoßen. Manchmal werden jedoch auch andere (Klein-)Buchstaben für Variablen verwendet.

Die Gleichungen $5 + x = 10$ und $5 + a = 10$ haben folglich die gleiche Bedeutung.

Gleichungen lösen

Bei einer Gleichung mit einer Variable, z.B.

$$5 + x = 10$$

ist vor allem derjenige x -Wert von Interesse, für den die Gleichung erfüllt ist.

Wie oben bereits gezeigt, ist die Gleichung für $x = 5$ erfüllt.

Der x -Wert, für den die Gleichung erfüllt ist, heißt **Lösung** der Gleichung.

In unserem Beispiel ist 5 also die Lösung der Gleichung. Falls wir nämlich diesen Wert für x einsetzen, ergibt sich eine wahre Aussage:

$$5 + 5 = 10 \quad \rightarrow \quad 10 = 10$$

Wenn du eine "Gleichung lösen" sollst, geht es letztlich um die Frage:

"Welche Zahl muss ich für x einsetzen, damit die Gleichung erfüllt ist?"

Die Antwort auf diese Frage ist dann, wie bereits erwähnt, die Lösung der Gleichung.

Gleichungen im Überblick

Im Laufe deiner Schulzeit (oder später in Ausbildung, Studium oder Beruf) wirst du es mit verschiedenen Gleichungen zu tun haben. Um nicht den Überblick zu verlieren, unterteilt man Gleichungen nach ihrem "Aussehen":

Bezeichnung	Beispiel
<u>Lineare Gleichungen</u>	$2x + 4 = 0$
<u>Quadratische Gleichungen</u>	$5x^2 + 2x + 2 = 0$
<u>Kubische Gleichungen</u>	$4x^3 + 6x^2 + 2x + 5 = 0$
Bruchgleichungen	$\frac{2+x}{x-1} = 3$
Wurzelgleichungen	$\sqrt{5x - 4} = 8$
Exponentialgleichungen	$5^{1+x} = 4^x$