

ANDREAS SCHNEIDER



Mathebibel

Sponsored by  Easy-Tutor

WAHRSCHEINLICHKEITSRECHNUNG

DAS BUCH DER ERKLÄRUNGEN

Inhaltsverzeichnis

Wahrscheinlichkeitsrechnung	3
Zufallsexperiment	5
Ergebnis & Ergebnisraum	8
Ereignis & Ereignisraum	13
Ereignis & Ereignisraum	18
Elementarereignis	20
Zusammengesetztes Ereignis	22
Sicheres Ereignis	23
Ereignisalgebra	25
Vierfeldertafel	34
Absolute Häufigkeit	40
Relative Häufigkeit	42
Mehrstufige Zufallsexperimente	46
Baumdiagramm	47
Pfadregeln	52
Kombinatorik	57
Allgemeines Zählprinzip	66
Permutation ohne Wiederholung	68
Permutation mit Wiederholung	71
Variation ohne Wiederholung	74
Variation mit Wiederholung	77
Kombination ohne Wiederholung	79
Kombination mit Wiederholung	82

Laplace-Experiment	85
Stochastische Unabhängigkeit	89
Bedingte Wahrscheinlichkeit	98
Multiplikationssatz	109
Satz der totalen Wahrscheinlichkeit	116
Satz von Bayes	121
Zufallsvariable	126
Diskrete Zufallsvariable	131
Stetige Zufallsvariable	136
Wahrscheinlichkeitsverteilung	140
Wahrscheinlichkeitsfunktion	144
Dichtefunktion	152
Verteilungsfunktion	159
Erwartungswert	178
Varianz	184
Standardabweichung	194
Diskrete Verteilung	200
Stetige Verteilung	203
Noch Fragen? Jetzt kostenlose Nachhilfestunde vereinbaren!	206

Wahrscheinlichkeitsrechnung

Zufallsexperiment	Was sind Zufallsexperimente?
Ergebnis & Ergebnisraum	Was ist das Ergebnis ω bzw. der Ergebnisraum Ω ?
Ereignis & Ereignisraum	Was ist das Ereignis E bzw. der Ereignisraum $\mathcal{P}(\Omega)$?
> Unmögliches Ereignis	Was ist das unmögliche Ereignis?
> Elementarereignis	Was ist ein Elementarereignis?
> Zusammengesetztes Ereignis	Was ist ein zusammengesetztes Ereignis?
>> Sicheres Ereignis	Was ist das sichere Ereignis?
Ereignisalgebra	Wie rechnet man mit Ereignissen?
Vierfeldertafel	Wie kann man die Verknüpfungen zweier Ereignisse visualisieren?
Absolute Häufigkeit	Was versteht man unter der absoluten Häufigkeit?
Relative Häufigkeit	Was versteht man unter der relativen Häufigkeit?
Mehrstufige Zufallsexperimente	Was sind mehrstufige Zufallsexperimente?
> Baumdiagramm	Wie visualisiert man mehrstufige Zufallsexperimente?
> Pfadregeln	Wie berechnet man Wahrscheinlichkeiten in mehrstufigen Zufallsexperimenten?
Kombinatorik	Was ist Kombinatorik?
> Allgemeines Zählprinzip	Was besagt das allgemeine Zählprinzip?
> Permutation ohne Wiederholung	Was versteht man unter einer Permutation ohne Wiederholung?
> Permutation mit Wiederholung	Was versteht man unter einer Permutation mit Wiederholung?

> <u>Variation ohne Wiederholung</u>	Was versteht man unter einer Variation ohne Wiederholung?
> <u>Variation mit Wiederholung</u>	Was versteht man unter einer Variation mit Wiederholung?
> <u>Kombination ohne Wiederholung</u>	Was versteht man unter einer Kombination ohne Wiederholung?
> <u>Kombination mit Wiederholung</u>	Was versteht man unter einer Kombination mit Wiederholung?
<u>Laplace-Experiment</u>	Was ist ein Laplace-Experiment?
<u>Stochastische Unabhängigkeit</u>	Wann sind zwei Ereignisse unabhängig?
<u>Bedingte Wahrscheinlichkeit</u>	Wann beeinflussen sich zwei Ereignisse?
> <u>Multiplikationssatz</u>	Was besagt der Multiplikationssatz?
> <u>Satz der totalen Wahrscheinlichkeit</u>	Was besagt der Satz der totalen Wahrscheinlichkeit?
> <u>Satz von Bayes</u>	Was besagt der Satz von Bayes?
<u>Zufallsvariable</u>	Was ist eine Zufallsvariable?
> <u>Diskrete Zufallsvariable</u>	Was ist eine diskrete Zufallsvariable?
> <u>Stetige Zufallsvariable</u>	Was ist eine stetige Zufallsvariable?
<u>Wahrscheinlichkeitsverteilung</u>	Was ist eine Wahrscheinlichkeitsverteilung?
> <u>Wahrscheinlichkeitsfunktion</u>	Was ist eine Wahrscheinlichkeitsfunktion?
> <u>Dichtefunktion</u>	Was ist eine Dichtefunktion?
> <u>Verteilungsfunktion</u>	Was ist eine Verteilungsfunktion?
<u>Erwartungswert</u>	Wie berechnet man den Erwartungswert?
<u>Varianz</u>	Wie berechnet man die Varianz?
<u>Standardabweichung</u>	Wie berechnet man die Standardabweichung?
<u>Diskrete Verteilung</u>	Was ist eine diskrete Verteilung?
<u>Stetige Verteilung</u>	Was ist eine stetige Verteilung?

Zufallsexperiment

In diesem Kapitel schauen wir an, was ein Zufallsexperiment ist.

Im Chemie- und Physikunterricht werden regelmäßig Versuche durchgeführt. Einer dieser Versuche könnte das Messen der Siedetemperatur von Wasser sein. Egal, wie oft wir den Versuch durchführen, wir erhalten stets dasselbe Ergebnis: Wasser verdampft bei 100°C.

In der Wahrscheinlichkeitsrechnung beschäftigen wir mit Versuchen, deren Ergebnisse sich nicht vorhersagen lassen, d. h. vom Zufall abhängig sind. Zu dieser Art von Versuchen zählt das Werfen einer Münze. Bekanntlich können wir nicht vorhersagen, ob „Kopf“ oder „Zahl“ oben liegt.

Ein **Zufallsexperiment** ist ein Versuch mit zufälligem Ausgang.

Beispiele für Zufallsexperimente

- Werfen einer Münze
- Werfen eines Würfels
- Ziehen einer Kugel aus einer Urne
- Ziehen einer Karte aus einem Kartenspiel
- Drehen eines Glücksrads
- Roulette
- Lotto
- Auswahl einer Zahl zwischen 1 und 10 durch einen Zufallsgenerator
- Befragung einer unbekanntenen Person nach der Partei, die diese bei der letzten Wahl gewählt hat
- Messung einer physikalischen Größe mit einer bestimmten Messmethode (wegen der unvermeidlichen, zufälligen Messabweichungen)

Eigenschaften eines Zufallsexperiments

Ein Versuch heißt **Zufallsexperiment**, falls

- (a) er unter gleichen Bedingungen beliebig oft wiederholbar ist,
- (b) alle möglichen Ergebnisse vor Durchführung bekannt sind und
- (c) sein Ergebnis sich nicht mit Sicherheit vorhersagen lässt.

Beispiel

Das Werfen einer Münze ist ein Zufallsexperiment, denn

- (a) es lässt sich unter gleichen Bedingungen beliebig oft wiederholen,
- (b) alle möglichen Ergebnisse („Kopf“ und „Zahl“) sind vor Durchführung bekannt und
- (c) sein Ergebnis („Kopf“ oder „Zahl“) lässt sich nicht mit Sicherheit vorhersagen.

Gegenbeispiel

Das Messen der Siedetemperatur von Wasser ist kein Zufallsexperiment, denn

- (a) es lässt sich zwar unter gleichen Bedingungen beliebig oft wiederholen und
- (b) alle möglichen Ergebnisse (100°C) sind vor Durchführung bekannt, aber
- (c) sein Ergebnis (100°C) lässt sich mit Sicherheit vorhersagen.

Einstufige Zufallsexperimente

Ein Zufallsexperiment, das nur einmal durchgeführt wird, heißt **einstufig**.

Beispiele für einstufige Zufallsexperimente

- einmaliges Werfen einer Münze oder eines Würfels
- einmaliges Ziehen einer Karte aus einem gemischten Stapel

Mehrstufige Zufallsexperimente

Ein Zufallsexperiment, das aus mehreren Schritten besteht, die für sich selbst auch Zufallsexperimente sind, heißt **mehrstufig**.

Beispiele für mehrstufige Zufallsexperimente

- zweimaliges Werfen einer Münze oder eines Würfels
- fünfmaliges Ziehen einer Karte aus einem gemischten Stapel

Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung

Die Wahrscheinlichkeitsrechnung baut auf folgenden Grundbegriffen auf:

	Bezeichnung	Beispiel
Zufallsexperiment		Werfen eines Würfels
Ergebnis	ω („Klein-Omega“)	Augenzahl 4 $\Rightarrow \omega = 4$
Ergebnisraum	Ω („Groß-Omega“)	$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
Ereignis	ein lat. Großbuchstabe (z. B. $A, B, C \dots$)	E : „Augenzahl kleiner 4“ $\Rightarrow E = \{1, 2, 3\}$
Ereignisraum	$\mathcal{P}(\Omega)$	$\mathcal{P}(\Omega) = \{\{\}, \{1\}, \dots, \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\}$

PS: Wir empfehlen euch, die Mengenlehre noch einmal zu wiederholen!