

ANDREAS SCHNEIDER



# Mathebibel

Sponsored by  Easy-Tutor

INTEGRALRECHNUNG

DAS BUCH DER ERKLÄRUNGEN

# Inhaltsverzeichnis

|   |           |
|---|-----------|
| <b>Integralrechnung</b> . . . . .   | <b>3</b>  |
| Stammfunktion . . . . .   | 4         |
| Unbestimmtes Integral . . . . .   | 8         |
| Integrationsregeln . . . . .  | 10        |
| Partielle Integration . . . . .   | 16        |
| Integration durch Substitution . . . . .                                    | 20        |
| Bestimmtes Integral . . . . .   | 27        |
| Flächenberechnung mit Integralen . . . . .                                  | 30        |
| Fläche zwischen Graph und x-Achse . . . . .                                 | 33        |
| Fläche zwischen zwei Graphen . . . . .                                      | 37        |
| <b>Noch Fragen? Jetzt kostenlose Nachhilfestunde vereinbaren!</b> . . . . . | <b>40</b> |

# Integralrechnung

|  |  |
|--|--|
| <u>Stammfunktion</u>                     | Was versteht man unter einer Stammfunktion und wie berechnet man sie?              |
| <u>Unbestimmtes Integral</u>             | Was ist ein unbestimmtes Integral und wie hängt es mit der Stammfunktion zusammen? |
| <u>Integrationsregeln</u>                | Welche Regeln muss man beim Rechnen mit Integralen beachten?                       |
| <u>Partielle Integration</u>             | Wie funktioniert eine partielle Integration?                                       |
| <u>Integration durch Substitution</u>    | Wie funktioniert eine Integration durch Substitution?                              |
| <u>Bestimmtes Integral</u>               | Wie berechnet man Integrale mit Integrationsgrenzen?                               |
| <u>Flächenberechnung mit Integralen</u>  | Wie hängt die Integralrechnung mit der Berechnung von Flächen zusammen?            |
| <u>Fläche zwischen Graph und x-Achse</u> | Wie berechnet man die Fläche zwischen Graph und x-Achse?                           |
| <u>Fläche zwischen zwei Graphen</u>      | Wie berechnet man die Fläche zwischen zwei sich schneidenden Graphen?              |

# Stammfunktion

In diesem Kapitel schauen wir uns an, was man unter der Stammfunktion einer Funktion versteht. Außerdem besprechen wir die Verbindung zwischen der Differentialrechnung und der Integralrechnung.

In der Praxis kommt es häufig vor, dass man die Ableitung einer Funktion  $f'(x)$  kennt und die Funktion selbst, also  $f(x)$ , finden möchte. In diesem Zusammenhang bezeichnet man  $f(x)$  als die Stammfunktion von  $f'(x)$ .

Wir wissen bereits, dass wir ableiten müssen, um die Ableitung einer Funktion zu berechnen. Was müssen wir jedoch tun, wenn die Ableitung gegeben und die Stammfunktion gesucht ist? Antwort: Aufleiten!

Hinweis: "Aufleiten" ist die Umkehroperation zum "Ableiten". Mathematisch korrekt ausgedrückt heißt dieser Vorgang "integrieren"...und schon befinden wir uns mitten in der Integralrechnung!

- **Differentialrechnung:** Wie berechne ich die Ableitung  $f'(x)$  einer Funktion  $f(x)$ ?  
-> ableiten
- **Integralrechnung:** Wie berechne ich die Stammfunktion  $f(x)$  einer Funktion  $f'(x)$ ?  
-> aufleiten (= integrieren)

Die mathematisch korrekte Schreibweise für die Stammfunktion einer Funktion lautet:  $F(x)$ .

Wichtig ist, dass du die Zusammenhänge zwischen  $f(x)$ ,  $f'(x)$  und  $F(x)$  verstehst:

- $f(x)$  ist eine gegebene Funktion
- $f'(x)$  ist die Ableitung von  $f(x)$
- $F(x)$  ist die Stammfunktion von  $f(x)$
- [außerdem gilt natürlich:  $f(x)$  ist die Stammfunktion von  $f'(x)$ ]

Der Zusammenhang zwischen der Aufleitung (= Stammfunktion) und der Ableitung ist so wichtig, dass er an dieser Stelle nochmal wiederholt wird:

$$f(x) \xrightarrow{\text{aufleiten}^*} F(x) \xrightarrow{\text{ableiten}} F'(x) = f(x)$$

\* statt "aufleiten" sagt man meist "integrieren"

Merke: Die Ableitung der Stammfunktion ergibt die Funktion selbst.

$$F'(x) = f(x)$$

Diese Tatsache ist ganz nützlich, wenn man überprüfen will, ob man die Stammfunktion richtig berechnet hat. Wenn man die Stammfunktion ableitet, muss die Funktion herauskommen, die man gerade "aufgeleitet" hat. Irgendwie logisch, oder?

Genug Theorie! Schauen wir uns doch mal ein einfaches Beispiel an.

### Beispiel

Gegeben ist die Funktion  $f(x) = 2x$ .

Gesucht ist die Stammfunktion, d.h. wir überlegen uns, welche Funktion abgeleitet  $2x$  ergibt. Das ist einfach:  $x^2$ .

Jetzt leiten wir die gefundene Stammfunktion ab, um das Ergebnis zu überprüfen.

$$F(x) = x^2 \quad \rightarrow \quad F'(x) = 2x = f(x)$$

Die Ableitung der Stammfunktion ergibt die ursprüngliche Funktion. Wir haben also die richtige Stammfunktion gefunden! .....STOPP!!! Gibt es denn immer nur eine Stammfunktion?..oder zwei?..oder drei? Und wenn ja, wie finde ich die anderen Stammfunktionen? Diese Fragen soll der nächste Abschnitt beantworten.